MATHEMATIQUES (3 h)

I

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps **C** des nombres complexes, rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) ; u est l'application linéaire de E dans E dont la matrice par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u^2 l'application composée de u par u et u^3 l'application composée de u^2 par u.

1° Montrer que u est bijective; déterminer la matrice de u^{-1} par rapport à la base (e_1, e_2, e_3).

2° Existe-t-il une base de E dans laquelle u admette une matrice diagonale?

Donner un exemple d'une telle base et écrire la matrice diagonale correspondante.

3° Quelles sont les valeurs propres de u^{-1} et de u^3?

4° Déterminer le noyau et l'image de l'application $u + u^2$.

II

Définition : Une variable aléatoire X à valeurs réelles est dite bornée si et seulement si il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la probabilité de l'événement « $|X| \leqslant M$ » soit égale à 1.

A

1° Montrer qu'une variable aléatoire réelle bornée X admet une espérance mathématique.

2° Pour tout nombre réel c et toute variable aléatoire bornée X, on note $L_c(X)$ l'espérance de la variable aléatoire e^{-cX}.
Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles bornées indépendantes, $L_c(X + Y) = L_c(X) \cdot L_c(Y)$ pour tout nombre réel c.

B

R désignant le corps des nombres réels, soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans **R** définie par

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1 \quad \text{ou si} \quad |y| > 1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)] \quad \text{si} \quad |x| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |y| \leqslant 1$$

1° Montrer que f peut représenter la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles (X, Y).

2° Déterminer la densité de X et celle de Y. Ces variables aléatoires sont-elles bornées? Calculer les espérances E(X) et E(Y) ; calculer $L_c(X)$ et $L_c(Y)$.

3° Dans cette question, on pourra admettre le résultat suivant :

Soit φ l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même définie par $\varphi(x, y) = (y, x)$; si D est un domaine borné de $\mathbf{R}^2$ et si g est une fonction réelle continue sur $\varphi(D)$,

$$\int_{\varphi(D)} g(x, y)\, dxdy = \int_D (g \circ \varphi)(x, y)\, dxdy$$

On note I la valeur commune de ces deux intégrales.

a. Montrer que si $\varphi(D) = D$ et si $g \circ \varphi = -g$, $I = 0$.

b. Déterminer la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

4° Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $L_c(Z)$, E(XY) et commenter les résultats.

C

Soient $(X_i)_{i = 1, 2, \ldots, n}$ n variables aléatoires réelles bornées indépendantes, de même loi de probabilité: on note Y_n la variable aléatoire

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

1° Montrer que pour tout nombre réel c, $L_c(Y_n) = [L_{c,n}(X)]^n$, où $L_{c,n}(X)$ désigne la valeur commune des $L_{c,n}(X_i)$.

2° On suppose que les X_i ont toutes la même densité uniforme sur [0, 1] :

Montrer que $L_c(Y_n)$ tend vers $e^{-c/2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Pouvait-on prévoir ce résultat?

N.B. : *La partie* C *est indépendante de la partie* B.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail